

24-25

GRADO EN FÍSICA  
TERCER CURSO

# GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA



## MÉTODOS MATEMÁTICOS IV

CÓDIGO 61043012

UNED

24-25

MÉTODOS MATEMÁTICOS IV

CÓDIGO 61043012

# ÍNDICE

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN  
REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA  
EQUIPO DOCENTE  
HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE  
TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS  
COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE  
RESULTADOS DE APRENDIZAJE  
CONTENIDOS  
METODOLOGÍA  
SISTEMA DE EVALUACIÓN  
BIBLIOGRAFÍA BÁSICA  
BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA  
RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA  
TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS  
IGUALDAD DE GÉNERO

Nombre de la asignatura	MÉTODOS MATEMÁTICOS IV
Código	61043012
Curso académico	2024/2025
Departamento	FÍSICA MATEMÁTICA Y DE FLUÍDOS
Título en que se imparte	GRADO EN FÍSICA
Curso	TERCER CURSO
Periodo	SEMESTRE 1
Tipo	OBLIGATORIAS
Nº ETCS	6
Horas	150.0
Idiomas en que se imparte	CASTELLANO

## PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

**Métodos Matemáticos IV** es una asignatura de carácter básico de la rama de Ciencias, que se inserta en la materia Métodos Matemáticos de la Física, y se imparte durante el primer semestre del tercer curso del Grado en Física. Tiene asociados 6 créditos ECTS (de 25 horas cada uno) y no tiene prácticas de laboratorio.

El contenido de esta asignatura es **Cálculo Tensorial** y **Geometría Diferencial**

En esta asignatura se combinan y generalizan diversos conceptos estudiados en la asignatura de Álgebra con herramientas de cálculo infinitesimal estudiadas en las asignaturas de Análisis Matemático I y II. Todo ello se aplica al estudio de curvas y superficies y al cálculo con campos tensoriales (escalares, vectoriales y de orden superior) en coordenadas generalizadas.

Los conceptos introducidos en esta asignatura forman parte del lenguaje básico de multitud de ramas de la física, en particular de las relacionadas con mecánica (p. ej. mecánica de fluidos), electromagnetismo, o relatividad. Por tanto, los conocimientos matemáticos adquiridos en esta asignatura serán de gran utilidad en diversas asignaturas de cursos avanzados del grado (p.ej. Mecánica, Física de Fluidos, Relatividad). Aunque el temario versa sobre conceptos matemáticos abstractos, en el curso se hará especial énfasis en las aplicaciones y relevancia de estos conceptos en física, conectando de esta forma los conocimientos adquiridos en esta asignatura con los requerimientos de cálculo necesarios para otras asignaturas del grado.

La primera parte de la asignatura se centra en el **Cálculo Tensorial**. Esta parte es algo más abstracta y posiblemente requiera mayor esfuerzo. En ella combinaremos conceptos sobre espacios vectoriales y aplicaciones lineales con conceptos de cálculo infinitesimal. El estudio de los tensores aparece de forma natural cuando se consideran cambios de base en espacios vectoriales, en este sentido estudiaremos cómo se transforman los objetos tensoriales definidos sobre un espacio vectorial bajo un cambio de base en función del rango tensorial del objeto de que se trate. Comenzaremos viendo los casos más habituales de tensores de orden 0 (escalares), tensores de orden 1 (vectores) y tensores de orden 2 (aplicaciones lineales). A continuación consideraremos el caso general de tensores de orden arbitrario definidos como función del punto y veremos cómo se transforman estos campos bajo un cambio de base. Esto nos permitirá aplicar las herramientas habituales del cálculo vectorial (gradiente, divergencia, rotacional, laplaciano) al caso de campos definidos sobre

superficies diferenciables en coordenadas generalizadas.

La relevancia en física del Cálculo Tensorial es enorme. En general todas las magnitudes físicas son objetos matemáticos con rango tensorial bien definido, es decir, son tensores. Por ejemplo los escalares (temperatura, masa, etc.) son tensores de orden 0, los vectores (velocidad, aceleración, etc.) son tensores de orden 1 y las aplicaciones lineales son tensores de orden 2 (p. ej. tensor de deformación en mecánica del continuo, tensor de velocidad de deformación en mecánica de fluidos, tensor de tensiones). El Cálculo Tensorial resulta indispensable siempre que trabajemos con este tipo de objetos y vayamos a aplicar cambios de base, lo cual es muy frecuente en física. Esto es lo que sucede por ejemplo cuando tenemos que resolver problemas en dominios espaciales con una forma geométrica que obliga (o al menos aconseja) el uso de coordenadas diferentes de las cartesianas (son archiconocidos los casos de simetría cilíndrica o esférica, pero hay innumerables ejemplos aparte de estos). El Cálculo Tensorial es indispensable para el estudio de la Teoría General de la Relatividad, pero también encuentra aplicaciones en otras ramas de la física, como la Mecánica de Fluidos, el Electromagnetismo o la Termodinámica, tal y como iremos mostrando a su debido tiempo.

La segunda parte de la asignatura se centra en la **Geometría Diferencial**. Posiblemente esta parte necesite poca presentación al ser más intuitiva. En Geometría Diferencial vamos a estudiar principalmente las propiedades de curvas y superficies, las distintas formas que existen para definir las (paramétrica, implícita) y sus principales propiedades (p. ej. su curvatura). El interés de esto en física es evidente, dado que las curvas y superficies son ingredientes habituales en la descripción matemática de multitud de sistemas físicos. Por ejemplo, desde los cursos más básicos de física se emplea el concepto de curva para describir las trayectorias de objetos móviles, o las líneas de campo para la descripción de campos vectoriales. En cuanto a las aplicaciones del estudio de superficies podemos considerar, p. ej., su uso para la descripción de campos escalares (como el potencial eléctrico), por medio del estudio de las superficies equipotenciales.

Uno de los conceptos más básicos en relación a la geometría de curvas es el de su longitud, que corresponde a la distancia recorrida si suponemos que la curva en cuestión es la trayectoria de un móvil. También veremos p. ej. cómo pueden calcularse la curvatura y torsión de una curva. En el caso de las superficies aparecen otras magnitudes interesantes que veremos en esta asignatura. Por ejemplo, estudiaremos cómo se calcula la longitud de una curva definida sobre una superficie determinada; cómo se describe la curvatura de una superficie, cómo se calcula su área, o cómo se calcula el ángulo formado por dos curvas que se cruzan en un punto determinado, o cuál es la curva más corta contenida en una superficie que une dos puntos dados de dicha superficie. Todo ello con diversas aplicaciones en física. Por último veremos las herramientas necesarias para la descripción y el cálculo con campos (p. ej. escalares o vectoriales) definidos sobre superficies, para lo cual haremos uso del Cálculo Tensorial estudiado en la primera parte.

## REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Esta asignatura no tiene requisitos previos. De todas formas, para el estudio con aprovechamiento de esta asignatura resulta más que recomendable tener un buen dominio de álgebra y cálculo con funciones de varias variables. Nuestra recomendación es iniciar el estudio de esta asignatura una vez se hayan superado las de álgebra y análisis matemático de primero y segundo.

## EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos	MANUEL ARIAS ZUGASTI (Coordinador de asignatura)
Correo Electrónico	maz@ccia.uned.es
Teléfono	91398-7127
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	FÍSICA MATEMÁTICA Y DE FLUIDOS

Nombre y Apellidos	PEDRO CORDOBA TORRES
Correo Electrónico	pcordoba@ccia.uned.es
Teléfono	91398-7141
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	FÍSICA MATEMÁTICA Y DE FLUIDOS

## HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

El Equipo Docente ofrecerá una completa tutorización de la asignatura a través de su Curso Virtual. Este curso virtual será la principal plataforma de comunicación entre el Equipo Docente y el alumno. A través del mismo, el Equipo Docente realizará el seguimiento del aprendizaje de los estudiantes e informará de los cambios, novedades, así como de cualquier otro aspecto sobre la asignatura que el Equipo Docente estime oportuno. Del mismo modo, el estudiante encontrará en el curso las herramientas necesarias para plantear al Equipo Docente cualquier duda relacionada con la asignatura.

El horario de atención al alumno por parte del Equipo Docente de la Sede Central será: lunes (excepto en vacaciones académicas) de 16:00 a 20:00 horas. En caso de que el lunes sea día festivo, la guardia pasará al siguiente día lectivo. Para cualquier tipo de consulta se recomienda utilizar los foros de debate habilitados en el Curso Virtual de la asignatura. Estos foros son revisados continuamente por el Equipo Docente y permiten una comunicación rápida y directa entre profesores, alumnos y tutores.

Aparte de los Foros de la asignatura disponibles en el Curso Virtual, en el apartado Equipo Docente de esta guía puede encontrar la información completa actualizada sobre los restantes canales básicos de contacto con el Equipo Docente: incluyendo número de teléfono, correo electrónico y dirección postal del departamento (ver info. de contacto en el enlace al departamento).

## TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

### COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

En esta asignatura el estudiante adquirirá las siguientes **competencias específicas** del Grado en Física:

**CE05** Ser capaz de entender y dominar el uso de los métodos matemáticos y numéricos más comúnmente utilizados, y de realizar cálculos de forma independiente, incluyendo cálculos numéricos que requieran el uso de un ordenador y el desarrollo de programas de software

**CE10** Ser capaz de buscar y utilizar bibliografía sobre física y demás literatura técnica, así como cualesquiera otras fuentes de información relevantes para trabajos de investigación y desarrollo técnico de proyectos

**CE11** Ser capaz de trabajar con un alto grado de autonomía y de entrar en nuevos campos de la especialidad a través de estudios independientes

En esta asignatura el estudiante desarrollará, además, las siguientes **competencias generales** del Grado:

**CG04** Conocimiento de inglés científico en el ámbito de estudio

**CG06** Capacidad de gestión de información

**CG10** Aprendizaje autónomo

**CG11** Adaptación a nuevas situaciones

### RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Tras cursar y superar esta asignatura, el estudiante habrá cumplido con los siguientes objetivos de aprendizaje mencionados en la memoria verificada del título:

- Entender la covariancia y contravariancia de tensores
- Conocer algunos tensores básicos en física
- Conocer la geometría intrínseca de una superficie

Con algo más de detalle, en esta asignatura aprenderá a:

1. Reconocer objetos matemáticos con rango tensorial bien definido, identificando correctamente los comportamientos covariante/contravariante. Realizar operaciones de cálculo básicas con estos objetos.
2. Aplicar correctamente las reglas de transformación para objetos tensoriales bajo cambios de base.
3. Resolver problemas de cálculo con campos tensoriales en coordenadas generalizadas (concepto y aplicaciones de la derivada covariante).
4. Analizar curvas regulares en  $\mathbb{R}^3$  por medio de las representaciones habituales (paramétrica/implícita). Calcular los vectores tangente, normal y binormal, emplear el triedro móvil (o de Frenet). Medir longitudes de curvas, emplear el parámetro "longitud de arco".

5. Analizar superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$ . Aplicación de la primera y segunda forma fundamental para la medida de longitudes, áreas y curvaturas. Calcular la curvatura de superficies incluyendo: curvaturas principales y direcciones principales de curvatura, curvatura media y curvatura de Gauss (clasificación de superficies).
6. Aplicar el concepto de curvas geodésicas (y curvatura geodésica) definidas sobre una superficie para la descripción de superficies por medio de coordenadas geodésicas (geometría intrínseca).

## CONTENIDOS

Cálculo Tensorial: Espacios vectoriales

Cálculo Tensorial: Cambios de base

Cálculo Tensorial: Algebra tensorial

Cálculo Tensorial: Campos tensoriales

Cálculo Tensorial: Derivación de campos tensoriales

Cálculo Tensorial: Operadores diferenciales habituales

Geometría Diferencial: Curvas

Geometría Diferencial: Curvatura y torsión

Geometría Diferencial: Teoría de curvas

Geometría Diferencial: Superficies

Geometría Diferencial: Primera y segunda forma fundamental

Geometría Diferencial: Teoría de superficies

Geometría Diferencial: Geometría intrínseca

Geometría Diferencial: Geometría global

## METODOLOGÍA

La preparación de la asignatura tiene una vertiente teórica y otra práctica. En primer lugar es necesario asimilar diversos conceptos matemáticos más o menos abstractos y a continuación ser capaz de aplicar estos conceptos para resolver problemas concretos. Como es habitual en las asignaturas de matemáticas, los conceptos abstractos encierran multitud de conexiones, implicaciones y consecuencias que, aunque están implícitas en la teoría, no salen a la luz de forma explícita hasta que un problema concreto las pone de manifiesto. Por este motivo la realización de problemas es la principal actividad de aprendizaje para esta asignatura.

## SISTEMA DE EVALUACIÓN

### TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen Examen de desarrollo

Preguntas desarrollo

Duración del examen 120 (minutos)

Material permitido en el examen

#### **Todo tipo de material escrito**

Criterios de evaluación

Cada ejercicio será valorado sobre la puntuación máxima correspondiente mencionada en el examen.

% del examen sobre la nota final 100

Nota del examen para aprobar sin PEC 5

Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC 10

Nota mínima en el examen para sumar la PEC 0

Comentarios y observaciones



El examen consistirá en la resolución desarrollada de varios problemas y ejercicios en los que se deberán aplicar los conceptos aprendidos durante en el curso. Ambas partes de la asignatura (Cálculo Tensorial y Geometría Diferencial) serán objeto de examen. El examen será puntuado sobre una **nota máxima de 10 puntos, repartidos en un número variable de ejercicios y/o subapartados (no necesariamente 10).**

#### **PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)**

¿Hay PEC?

Si

Descripción

Para la evaluación continua se propondrá, a mediados del curso, una Prueba de Evaluación Continua que consistirá en una colección de ejercicios y problemas sobre los que el estudiante deberá trabajar en casa. El informe con los resultados deberá ser enviado en un único documento a través del curso virtual de acuerdo con el calendario de actividades establecido por el Equipo Docente. Esta prueba tiene carácter **voluntario** y su contribución será siempre positiva.

Criterios de evaluación

Cada ejercicio será valorado sobre la puntuación máxima correspondiente mencionada en el enunciado de la PEC.

Ponderación de la PEC en la nota final

La calificación obtenida será sumada a la nota obtenida en el examen presencial. La resolución correcta de esta prueba podrá incrementar la nota final hasta un máximo de un punto.

Fecha aproximada de entrega

La fecha de entrega será debidamente anunciada en el curso virtual

Comentarios y observaciones

#### **OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES**

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s?

No

Descripción

No hay

Criterios de evaluación

No procede

Ponderación en la nota final

0

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

#### **¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?**

La nota final de la asignatura será la suma de las notas obtenidas en las dos pruebas. Para aprobar la asignatura es necesario haber obtenido una nota final mayor o igual a 5.

## BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9780070379855

Título:DIFFERENTIAL GEOMETRYnull

Autor/es:Martin M. Lipschutz ;

Editorial:Ed.Mcgraw-Hill, Serie Schaum

La primera parte del curso: Cálculo Tensorial, podrá estudiarse siguiendo el material disponible en el curso virtual de la asignatura. El enfoque de esta primera parte coincide en gran medida con el libro de David C. Kay mencionado en la Bibliografía Complementaria. Para un estudio a nivel más profundo de esta parte se recomienda el texto clásico de Synge and Schild, y para las aplicaciones en física es especialmente recomendable el libro de Rutherford Aris, ambos en la Bibliografía Complementaria.

La parte de Geometría Diferencial sigue el texto de Martin M. Lipschutz, publicado por McGraw-Hill (serie Schaum). Lamentablemente la edición en español de este texto clásico está agotada, motivo por el cual figura la edición original en inglés en la Bibliografía Básica. De todas formas, el texto de Lipschutz es tan popular y su uso tan extendido que aún hoy pueden encontrarse copias de la edición en español en las bibliotecas de algunos Centros Asociados.

Para un estudio con mayor profundidad de esta parte del curso recomendamos el texto clásico de Manfredo P. Do Carmo, citado en la Bibliografía Complementaria.

## BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13):9780486636122

Título:TENSOR CALCULUSnull

Autor/es:J. L. Synge And A. Schild ;

Editorial:: DOVER PUBLICATIONS

ISBN(13):9780486661100

Título:VECTORS, TENSORS, AND THE BASIC EQUATIONS OF FLUID MECHANICSnull

Autor/es:

Editorial:DOVER PUBLICATIONS

ISBN(13):9788420681351

Título:GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES2

Autor/es:Do Carmo, Manfredo P. ;

Editorial:ALIANZA EDITORIAL, S.A.

ISBN(13):9788476150757

Título:GEOMETRÍA DIFERENCIAL1

Autor/es:- ;

Editorial:McGraw-Hill / Interamericana de España, S.A.

ISBN(13):9788476154533

Título:CÁLCULO TENSORIAL : TEORÍA Y PROBLEMAS[trad. de la 1ª ed. en inglés]

Autor/es:Abellanas Rapún, Lorenzo ;

Editorial:MACGRAW-HILL

## RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Aparte de las Bibliografías Básica y Complementaria recomendadas, el principal recurso de apoyo al estudio será el Curso Virtual de la asignatura. En él se podrá encontrar todo el material para la planificación (calendario, noticias, ...) y para el estudio de la asignatura no incluido en la bibliografía (apuntes, ejemplos, ejercicios, ...) así como las herramientas de comunicación, en forma de Foros, para que el alumno pueda consultar al Equipo Docente las dudas que se le vayan planteando así como otras cuestiones relacionadas con el funcionamiento de la asignatura.

Estos foros serán la principal herramienta de comunicación entre el Equipo Docente y el estudiante. Por consiguiente, se insta a que el estudiante siga de un modo regular el curso virtual ya sea mediante visitas periódicas al mismo, ya sea a través de las herramientas de notificaciones automáticas.

El estudiante también tendrá a su disposición el conjunto de facilidades que la Universidad ofrece a sus alumnos (equipos informáticos, bibliotecas, ...), tanto en los Centros Asociados de la Uned como en la Sede Central.

## TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

---

## IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.